

Stone双対性と極度不連結空間の圏論的 深層

本稿では、位相空間論、代数系、関数解析の三領域が交差する極めて重要な「双対性」について、圏論の言葉を用いて厳密に記述する。特に、極度不連結性という位相的性質が、代数側の完備性や射影性とどのように対応するかを、詳細な証明とともに詳述する。

1. 完全不連結空間の微細構造と非Hausdorff空間

1.1 完全不連結性と分離公理

定義 1.1 (完全不連結空間)

位相空間 X において、任意の連結成分が一点集合であるとき、すなわち各 $x \in X$ に対して x を含む連結部分集合が $\{x\}$ のみであるとき、 X を完全不連結 (totally disconnected) であるという。

定理 1.2 (完全不連結空間における T_1 性)

完全不連結空間 X は常に T_1 空間である。

証明:

空間 X が T_1 であることの必要十分条件は、任意の一点集合 $\{x\}$ が閉集合であることである。位相空間論の一般的性質として、連結成分は常に閉集合である。なぜなら、連結集合の閉包は再び連結であるため、極大な連結集合（連結成分）は自身の閉包に等しくなければならないからである。 X が完全不連結であるという仮定により、各点 x の連結成分は $\{x\}$ 自体である。したがって、各 $\{x\}$ は閉集合となり、 X は T_1 空間である。 \square

1.2 Hausdorff 性を欠く構成の詳細

「2つの原点を持つ直線」の構成論理を、離散空間の一点コンパクト化に適用する。これにより、コンパクトかつ完全不連結であるが Hausdorff ではない空間を得る。

構成と証明：

可算無限離散空間 $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ をとり、その一点コンパクト化を $X = D \cup \{\infty\}$ とする。 X のコピーを2つ用意し、

$X_1 = (D \times \{1\}) \cup \{\infty_1\}$, $X_2 = (D \times \{2\}) \cup \{\infty_2\}$ とする。商空間 Y を、各 $d \in D$ に対して $(d, 1) \sim (d, 2)$ という同値関係で割ることで定義する。

1. **コンパクト性:** Y の開被覆 \mathcal{U} をとる。 ∞_1 を含む $U_1 \in \mathcal{U}$ と ∞_2 を含む $U_2 \in \mathcal{U}$ を選ぶ。 X の一点コンパクト化の位相により、 U_1 は D の有限集合 F_1 を除く全ての点を、 U_2 は F_2 を除く全ての点を含む。残された点は $F_1 \cup F_2$ という有限集合であるため、有限個の開集合で覆える。よって Y はコンパクトである。

2. **完全不連結性:** 任意の異なる二点 $a, b \in Y$ に対し、それらを分離する開かつ閉集合（clopen集合）が存在することを示す。 a, b が ∞_1, ∞_2 のペアでない限り容易である。 ∞_1, ∞_2 についても、各 $d \in D$ を含む単集合 $\{d\}$ は開かつ閉である。連結成分を考えると、いかなる二点も同一の連結部分集合に含まれないことが導かれる。

3. **非Hausdorff性:** ∞_1 の任意の開近傍 V_1 は定義より $D \setminus K_1$ (K_1 は有

限) の形を、 ∞_2 の任意の開近傍 V_2 は $D \setminus K_2$ (K_2 は有限) の形を含む。 D が無限集合であるため、 $(D \setminus K_1) \cap (D \setminus K_2) = D \setminus (K_1 \cup K_2)$ は決して空集合にならない。よって ∞_1 と ∞_2 を分離する交わらない開集合は存在しない。 \square

2. 極度不連結性と射影的对象

定義 2.1 (極度不連結空間)

位相空間 X において、任意の開集合 U の閉包 \bar{U} が再び開集合となるとき、 X を極度不連結 (**extremally disconnected**) であるという。

2.1 コンパクト Hausdorff 空間の圏 **CompHaus**

圏 **CompHaus** の定義：

- 対象 (Objects): コンパクトかつ Hausdorff な位相空間 X, Y, \dots
- 射 (Morphisms): 連続写像 $f : X \rightarrow Y$

この圏において、エピ射は連続全射に一致し、モノ射は連続単射に一致する。

定理 2.2 (Gleason の定理, 1958)

CompHaus において、対象 P が射影的对象 (**projective object**) であることと、 P が極度不連結であることは同値である。

射影的对象の定義と極度不連結性の関係：

P が射影的であるとは、任意の全射連続写像 $e: X \rightarrow Y$ と連続写像 $f: P \rightarrow Y$ に対し、 $e \circ \bar{f} = f$ を満たす連続写像 $\bar{f}: P \rightarrow X$ が存在することをいう。離散空間 D の Stone-Čech コンパクト化 βD は極度不連結であり、かつ任意の $X \in \mathbf{CompHaus}$ はある βD からの全射像として表される (D として X の台集合をとればよい)。このことから、 $\mathbf{CompHaus}$ には「十分に射影的对象が存在する」ことがわかる。□

3. Gelfand-Naimark 双対性と関数環

3.1 可換 C^* -環の圏

圏 $\mathbf{cComm}C^*\mathbf{Alg}$ の定義：

- 対象: 単位的で可換な C^* -環 A (複素数体上のバナッハ代数であり、対合 $*$ と不変性 $\|a^*a\| = \|a\|^2$ を持つもの)。
- 射: 単位元を保つ $*$ -準同型写像 $\phi: A \rightarrow B$ 。

定理 3.1 (Gelfand-Naimark 双対性)

関手 $C: \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{cComm}C^*\mathbf{Alg}^{op}$ を $X \mapsto C(X, \mathbb{C})$ と定義すると、これは圏の同値 (反変同値) を与える。

証明の骨子：

任意の可換 C^* -環 A に対し、その極大イデアル空間 (または指標空

間) $\Delta(A)$ を構成すると、これはコンパクト Hausdorff 空間になる。
 $A \cong C(\Delta(A))$ なる同型が存在し、これが圏同値の逆関手を与える。こ
の枠組みにおいて、 X の位相的性質は $C(X)$ の代数的性質へと完全に
翻訳される。 □

4. Stone 双対性と五重の圏同値

ここでは完全不連結コンパクト Hausdorff 空間の圏 **Stone** を中心とした、異なる
数学的対象の圏同値を詳述する。

4.1 五つの圏の定義

1. **Stone**: 対象は完全不連結コンパクト Hausdorff 空間。射は連続写像。
2. **Bool**: 対象はブール代数。射はブール準同型 ($\wedge, \vee, \neg, 0, 1$ を保つ写像)。
3. **ProFin**: 対象は有限離散空間の射影系から得られる射影極限 (profinite 空間)。射は連続写像。
4. **cCommC*_{Proj}**: 対象は射影元 ($p^2 = p = p^*$) で生成される可換 C^* -環。射は単位的 $*$ -準同型。
5. **cCommC*_{AF}**: 対象は有限次元可換 C^* -環 \mathbb{C}^n の直和の帰納極限として得られる C^* -環。

定理 4.1 (Stone 双対性の定式化)

関手 $\mathcal{B} : \mathbf{Stone} \rightarrow \mathbf{Bool}^{op}$ を $X \mapsto \text{Clop}(X)$ (X の開かつ閉集合のなすブール代数) と定義する。ここで射 $f : X \rightarrow Y$ に対し、
 $\mathcal{B}(f) = f^{-1} : \text{Clop}(Y) \rightarrow \text{Clop}(X)$ とする。これは圏の反変同値を与える。

証明:

ブール代数 $B \in \mathbf{Bool}$ に対し、そのストーン空間 $S(B)$ を、すべての超フィルタ (ultrafilter) の集合に「ストーン位相」を入れたものとして構成する。任意のブール代数 B に対して $B \cong \text{Clop}(S(B))$ が成り立ち、任意のストーン空間 X に対して $X \cong S(\text{Clop}(X))$ が同相の意味で成り立つ。この対応は射のレベルでも整合しており、圏同値が確立される。 \square

5. 極度不連結性と代数的完備性の証明

本稿の核心である、極度不連結空間と完備ブール代数の一対一対応を証明する。

定理 5.1 (位相的極度不連結性 \iff 代数的完備性)

ストーン空間 X において、以下は同値である。

1. X は極度不連結である。
2. ブール代数 $B = \text{Clop}(X)$ は完備 (任意の集合が上限を持つ) である。
3. $C(X)$ は Baer C^* -環である。

1 \implies 2 の証明:

$B = \text{Clop}(X)$ の任意の部分集合族 $\{U_i\}_{i \in I}$ をとる。これらの開集合としての和集合 $V = \bigcup_{i \in I} U_i$ を考える。 X は極度不連結であるから、定義により \bar{V} は開集合である。また閉包は常に閉集合であるから、 \bar{V} は開かつ閉、すなわち $\bar{V} \in B$ である。この \bar{V} が B における $\{U_i\}$ の上限 (最小上界) であることを示す。まず、各 i に対して $U_i \subset V \subset \bar{V}$ であるから、 \bar{V} は上界である。次に、 $W \in B$ を別の上界とする。すべての i で $U_i \subset W$ であるから、その和集合について $V \subset W$ とな

る。 W は clopen ゆえ閉集合であり、閉包の定義から $\bar{V} \subset W$ が従う。よって \bar{V} は最小の上界であり、 B は完備である。

2 \Rightarrow 1 の証明:

任意の開集合 $V \subset X$ をとる。 X はストーン空間であるため、clopen集合の族 $\{U_i\}$ を用いて $V = \bigcup U_i$ と書ける。 B の完備性より、 B 内に上限 $W = \bigvee U_i$ が存在する。 W は V の上界であるから $V \subset W$ であり、 W は閉集合なので $\bar{V} \subset W$ である。ここで $\bar{V} = W$ を示す。もし $\bar{V} \subsetneq W$ と仮定すると、開集合 $W \setminus \bar{V}$ は空でない。ストーン空間の基底の性質より、空でない clopen 集合 $K \subset W \setminus \bar{V}$ が存在する。このとき $W' = W \setminus K$ を考えると、 W' は B の元であり、かつ全ての U_i を含んでいる (なぜなら $K \cap V = \emptyset$ より $K \cap U_i = \emptyset$)。これは W が最小上界であることに矛盾する。したがって $\bar{V} = W$ であり、 W は開集合であるから X は極度不連結である。 \square

5.2 Baer 環との関連

可換環 A において、部分集合 S の零化イデアルを $\text{Ann}(S) = \{a \in A \mid \forall s \in S, as = 0\}$ とする。可換 C^* -環 $C(X)$ が **Baer** であるとは、任意の $S \subset C(X)$ に対して $\text{Ann}(S)$ がある射影元 p によって生成される単項イデアル (p) となることをいう。これは位相的には、任意の開集合の補集合の内部 (あるいは開集合の閉包) が clopen であることと対応しており、極度不連結性の代数的表現に他ならない。

6. Stone-Čech コンパクト化と局所コンパクト空間への拡張

6.1 局所コンパクト空間 X と βX

局所コンパクト完全不連結空間 X に対し、その clopen 集合全体のなすブール代数を $B = \text{Bool}(X)$ とする。この B に Stone 双対性の逆関手（指標空間の構成）を適用して得られるコンパクト空間は、元の X ではなく、その **Stone-Čech** コンパクト化 βX となる。

$$\beta X \cong \text{Spec}(\text{Bool}(X))$$

ここで Spec はブール代数の極大フィルタ全体の空間である。

これは、代数的に単位元を持たないブール環に単位元を「最小限の形で」添加する操作が、位相的に空間をコンパクト化する操作に完全に対応していることを示している。Gelfand-Naimark の文脈では、これは $C_0(X)$ から $C_b(X)$ への移行として理解される。

以上、完全不連結空間、極度不連結空間、そしてブール代数と C^* -環の間の深遠な対応についての解説を終わる。